www.tousles concours.info

EXERCICE 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$, $u_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ Si $n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que (u_n) est une suite décroissante minorée par 0.
2) Soit n un entier naturel non nul.
   a. Montrer que la fonction $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ admet un maximum relatif en un point α_n sur l'intervalle $[0\,,\,1]$
   b. Etablissez : $u_n \leq f_n(\alpha_n)$
3) Déduisez en la limite de (u_n)
4) Calculer u_0
5) A l'aide d'une intégration par partie, établissez pour tout n entier positif non nul la relation : $(2n+3)u_n = 2u_{n-1}$
6) Montrer que pour tout entier positif non nul, on a : $u_n = \frac{2^{2n+2}n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

EXERCICE 2

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{\pi}{4}x - \tan(x)$

1) a. Monter que la fonction φ est dérivable sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ et qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ tel que : $\varphi'(\alpha) = 0$.
   b. Etudier le sens de variation de φ sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$
   c. déduisez en, pour tout x de $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$, l'inégalité $\tan(x) \leq \frac{4}{\pi}x$
2) On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx$
   a. Calculer I_1 et I_2
   b. Utilisez le n°1 pour démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$
   c. Quelle est la limite de (I_n)?
3) a. soit U une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. . Montrer que la fonction V, définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $V(x) = U(\tan(x))$ est dérivable. Exprimez sa dérivée à l'aide de celle de U.
   b. Pour tout entier $n \geq 3$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^{n-2}(x) + \tan^n(x))dx$. Déduisez en : $I_n = -I_{n-2} + \frac{1}{n-1}$. Pour tout $n \geq 3$
4) Soit (v_k) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$.
   a. Déduisez du 3° que pour tout entier $n \geq 5$, on a alors $I_n = I_{n-4} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3}$
   b. Monter que, pour tout entier $k \geq 1$, on a alors $I_{4k+1} = I_1 - \frac{1}{2}v_k$
   c. Monter que la suite (v_k) converge vers une limite, que vous préciserez.

EXERCICE 3

Partie I : ABCD est un carré. ABJ et CDK sont des triangles équilatéraux tels que J est à l'intérieur du carré et K à l'extérieur.

1) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DJ})$

www.touslesconcours.info

2) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DK})$

3) Démontrer que les points D, J et K sont alignés.

Partie II : ABCD est un tétraèdre trirectangle de sommet principal A (c'est-à-dire que ses faces ABC , ACD, A sont des triangles rectangles) tel que BCD soit un triangle équilatéral. Soit G le centre de gravité du trian BCD.

1) Démontrer que les triangles ABC, ABD et ACD sont isocèles.

2) Démontrer que la droite (AG) est orthogonale aux droites (BC) et (BD)

3) En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD)